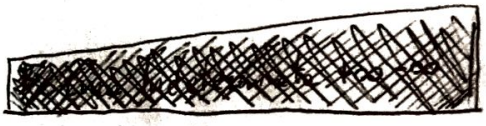
Esempio Somma e Risoluzione F. Ind.

$\lim_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty$

($+\infty$ e $+\infty$)

In alternativa si può valutare l'andamento delle x "più" grande.



Esempio Prodotto

- $f \xrightarrow{x\to x_0} +\infty \quad g \xrightarrow{x\to x_0} l_2 \neq 0$

  $f \cdot g \xrightarrow{x\to x_0} \infty \cdot l_2$ (col segno di l_2)

- $f \xrightarrow{x\to x_0} +\infty \quad g \xrightarrow{x\to x_0} 0$

  $f \cdot g \xrightarrow{x\to x_0} \infty \cdot 0 =$ INDETERMINATO

- $f \xrightarrow{x\to x_0} +\infty \quad g \xrightarrow{x\to x_0} +\infty$

  $f \cdot g \xrightarrow{x\to x_0} \infty$ (~~cont~~ seguendo i segni)

Esempi Rapporto

- $\frac{l}{\infty} \to 0$
- $\frac{\infty}{l} \to \infty$ (segno) con $l \neq 0$
- $\frac{\infty}{\infty} \to$ INDETERMINATO
- $\frac{\infty}{0} \to \infty \cdot \frac{1}{0} \to \infty \cdot \infty \to \infty$
- $\frac{0}{\infty} \to \frac{1}{\infty} \cdot \frac{0}{1} \to \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty} \to 0$
- $\frac{l}{0} \to \infty$ (segno)
- $\frac{0}{l} \to 0$
- $\frac{0}{0} \to 0 \cdot \frac{1}{0} \to 0 \cdot \infty \to$ INDETERMINATO

Aka Forme di Indecisione

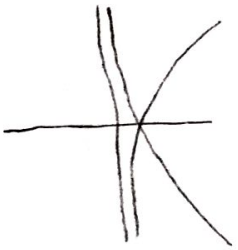
Esempi Potenze

- $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) > 0$
- $1^\infty \to 1^+{}^\infty \to \infty$ / $1^\infty \to 1^-{}^\infty \to 0$ — INDETERMINATO
- $0^0 \to$ INDETERMINATO
- $\infty^0 \to$ INDETERMINATO

Logaritmi

$y = a^x$

$y = \log_a x$



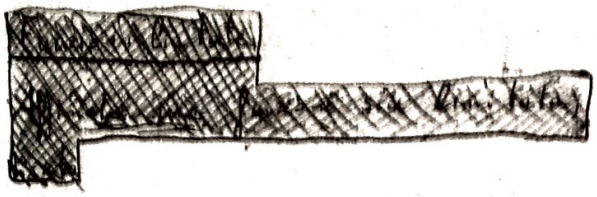
$x = \ell\, a^{\log_a x} \qquad a^{\log_a x^b} = b \cdot a^{\log_a x}$

Esempi Potenze

- $f(x)^{g(x)} = a^{\log_a (f(x)^{g(x)})} = g(x)\ a^{\log_a (f(x))}$
- $f \to 1 \quad g \to \infty$
- $1^\infty = \infty \cdot a^{\log_a(1)} = \infty \cdot 0$
- $0^0 = 0 \cdot a^{\log_a(0)} = 0 \cdot (-\infty)$

Esercizio

$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} a^{\log_a x^x} = \lim_{x\to 0^+} x \log_a x$



Una funzione non è detto che abbia un massimo/minimo assoluti, nè che se le abbia relativi, questi siano finiti.

Esempio

$f(x) = \sin x$

massimi rel. $= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

minimi rel. $= \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$\max f(x) = 1 \quad \min f(x) = -1$

Esempio

$f(x) = x \cdot \sin x$ ha infiniti max/min rel.

$\sup f(x) = +\infty \quad \inf f(x) = -\infty$

Funzioni Monotone cresc/decresc.

$f: X \to \mathbb{R}$

f si dice monotona crescente (decresc.) se e solo se $\forall (x_1, x_2) \in X \mid x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$.

Con $>$ $<$ $(>)$ senza "$=$" sono strettamente cresc. (decresc.).

- Se f è monotona allora f è [redacted] biettiva e invertibile
- Analogamente f^{-1} è monotona e

Limite di funz. composta $g \circ f$

$f: A \to \mathbb{R} \qquad g: B \to \mathbb{R}$

$g(B) \subseteq A$ ed $x_0 \in B'$

allora

$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \in A'$ e $L \in g(B')$

$\lim_{y \to L} f(y) = K$

allora per $f \circ g$ $(f \circ g)(x)$ vale

$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = K$

Importante perchè permette di effettuare sostituzioni di variabili nella risoluzione del limite per semplificarlo

Esempio

$\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Uno vale 0 va ad ∞ e l'altro a 0

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow$ per $x \to \infty$, $y \to 0$

posso riscrivere il limite come

$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

Th. Lim. funz. monotone

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, con f monotona

Se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$, ma esistono solo i limiti da dx ed sx, allora essi sono rispettivamente i limiti inferiore e superiore dei sup intervalli delimitati dagli estremi dall'intervallo (a,b) e dalla discontinuità.

Deff. Infiniti ed infinitesimi

$f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, f si dice infinitesima per $x \to x_0$
- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, f si dice infinita per $x \to x_0$

Confronti: inf. e inf.

- Siano f e g inf per $x \to x_0$. NB medesimo x_0

Prendo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Se

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, allora f si dice inf di ord. sup. a g

$= \infty$, allora f si dice inf di ord. infer. a g

$= L \neq 0$, allora f e g sono inf dello stesso ord.

$\nexists L$, allora f e g sono inf non confrontabili

Def. Principio trascurabilità degli infinitesimi

Siano f, f', g, g' infinitesimi per $x \to x_0$ NB medesimo x_0

Se prendo $\lim_{x \to x_0} \frac{(f+f')}{(g+g')}$ e so che f' e g' sono inf di ordine superiore rispetto ad f e g, posso mettere in evidenza $\frac{f}{f}$ ed ottenere: $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{f} \frac{\left(1+\frac{f'}{f}\right)}{\left(1+\frac{g'}{g}\right)}$, con $\frac{f'}{f}$ e $\frac{g'}{g}$ che tendono a 0 secondo la definizione.

$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+f')}{(g+g')}$ DIVENTA $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}$

In sintesi, quando si ha una somma algebrica di funzioni infinite, è possibile ignorare tutte quelle di grado più basso e selezionare solo quelle di grado maggiore, ciascuna per il numeratore ed il denominatore.

Simboli di Landau (o-piccolo)

Date f e g infinitesime, per $x \to x_0$, medesimo x_0, se f è infinitesima di ordine superiore a g, si può anche scrivere che f è un o-piccolo di g: $f(x) = o(g(x))$.

Se $f(x) = o(1) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Esempio

$f(x) = o(x^5) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x^5} = 0$

Esempio

$f(x) = o(x^5)$ e $g(x) = o(x^3)$

- $f(x) \cdot g(x) = o(x^8)$
- $f(x)/g(x) = o(x^2)$
- $f(x) + g(x) = o(x^3)$ per il principio di trascurabilità degli infinitesimi

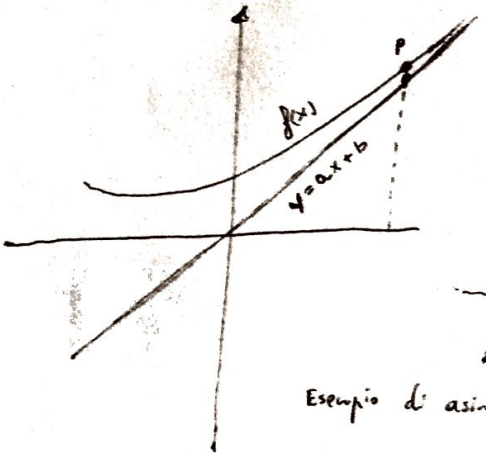
Analisi (27) EN 1

Def. Asintoto per una fun. f (orizz. e obliqui)

$y = ax + b$ è asintoto se

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

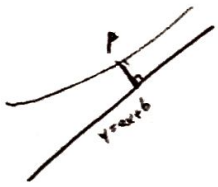
Cioè se* è uguale alla retta più un minimo errore



Esempio di asintoto obliquo

Dimostrazione

$p = (x, f(x))$



$$d(P, r) = \frac{|ax + f(x) + b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

poiché $f(x) = ax + b + o(1)$:

$$\frac{|\cancel{ax} - \cancel{ax} - \cancel{b} - o(1) + \cancel{b}|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|o(1)|}{\sqrt{a^2+1}} = 0$$

Trovare asintoti in f (obliqui)

~~Poiché~~ Se $f(x) = ax + b + o(1)$

$$a = \frac{-b - o(1)}{x} \quad \text{per } x \to \infty \quad \frac{b}{x} \to 0, \ \frac{o(1)}{x} \to 0, \ a = a$$

quindi $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

Nota: è un confronto tra y e x: $\frac{f(x)}{x} = \frac{y}{x} = a$ (se esiste)

Si calcola sempre prima a

Sino a Landau con o piccolo e simbolo equivalente

o(1) - errore di approssimazione

"È meglio che si tocchino prima di adagiarsi l'uno sull'altra"

"Possono fare qualunque porcheria prima di ~~adagiarsi~~ toccarsi"

$b = f(x) - ax$ per $x \to \infty$

$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax$

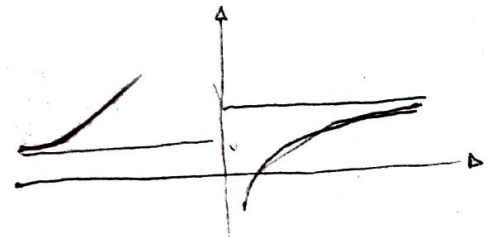
Se $\nexists b$ a è comunque un indice della ripidità.

La ricerca degli as. obl. non è necessario ai fini del compito, è opportuno farlo solo se è semplice calcolarlo.

L'asintoto e la ~~curva~~ curva si possono "toccare" prima di tendere al limite.

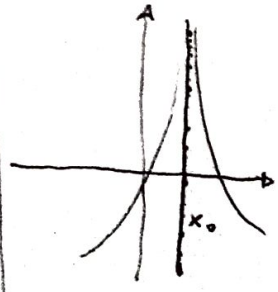
Trovare asintoti orizzontali

$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Rightarrow y = a$ è l'eq. dell'as. orizz.



Non possono esistere as. orizzontali e obliqui a $+\infty$ o $-\infty$. Possono essere però uno a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$

Trovare asintoti verticali

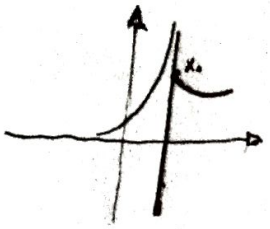


$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

x_0 deve essere un punto ai confini del campo di esistenza.

Osservazione su as. verticali.
Spesso succede che si cerchi punti in punti definiti, tipo $x \to 0$. Questo NON SERVE

Esempio particolare



$f(x)$ è definito, ma a sx è problematico

Esempio

$f(x) = \frac{x}{x+1}$ CE: $x \neq -1$

Int. Ax $\begin{cases} x=0 \\ \frac{0}{1}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ y=\frac{x}{x+1}=0 \end{cases}$ Quindi si incontrano in $O=(0,0)$

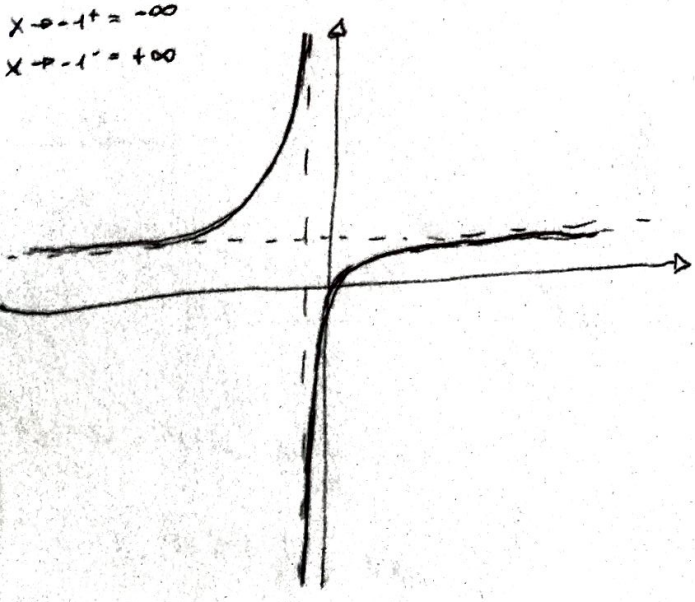
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ $y=1$ è as. orizz. completo

Essendo completo non ha senso cercare as. obliqui.

$\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{-1^2+1} =$ Se ci sono dubbi, provare con numeri ~~quasi~~ vicini.

$= \frac{-1}{0^{\pm}} = \mp\infty$ Inventine: segni $\pm$ e $\mp$ indica se sia il risultato da sx o da dx.

$x \to -1^+ = -\infty$
$x \to -1^- = +\infty$



Se una fun è definita per $x>0$, non ha senso fare il lim $\to -\infty$

Completo := sx e dx

Esempio

$y = \sqrt{x^2+1}$ $x^2+1>0 \to \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi non ci sono as. verticali.

Int. Ax $\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{x^2+1}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ \text{Impossibile} \end{cases}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Poiché il lim è inf. posso cercare gli as. obliqui.

$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} =$

$= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} =$ nel passo fare $\frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

quindi faccio $\to$ tendono a 1

$\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \frac{|x|}{x}$ $\nearrow \frac{x}{x}=1$ $\quad \searrow \frac{-x}{x}=-1$

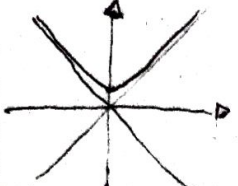
$a_+ = 1$ per $x \to +\infty$

$a_- = -1$ per $x \to -\infty$

$b_+ = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

$b_- = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x$

STRATAGEMMA: RAZIONALIZZARE!
moltiplico e divido tutto per $\sqrt{x^2+1}+x$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} =$

$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$